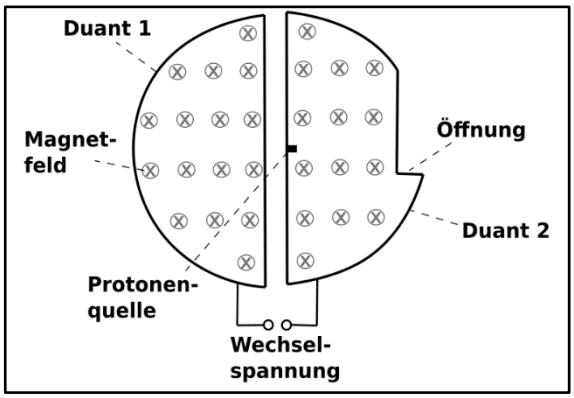
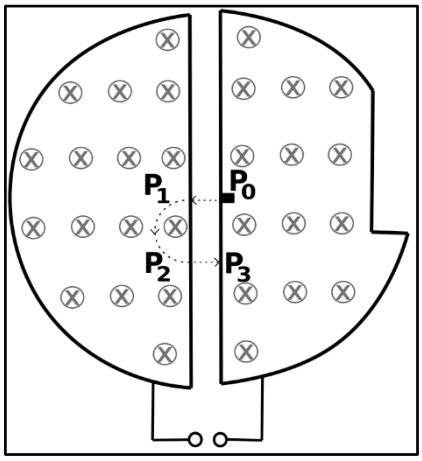
Aufgabenzettel – Zyklotron - Lösung

Um Elementarteilchen zu erforschen und sie in den Bereichen Medizin und Technik zu verwenden, sind Teilchen mit hoher Energie erforderlich. Diese hohen Energien werden in sogenannten Beschleunigern erreicht, wobei eine spezielle Form der Beschleuniger das Zyklotron ist. Die grundlegende Funktionsweise des Zyklotrons wird in den beiden nachfolgenden Abbildungen dargestellt.

Die gesamte Anordnung befindet sich in einem Vakuum und besteht hauptsächlich aus zwei innen hohlen D-förmigen Elektroden, D1 und D2. Man kann sich ihre Form als eine flache Dose vorstellen, die in zwei Teile geschnitten ist. An diese Elektroden, auch als Duanten bezeichnet, wird eine Spannung U angelegt, die ein elektrisches Feld erzeugt. Dieses Feld ist nur im Spalt zwischen den Duanten vorhanden, nicht jedoch im Inneren der hohlen Duanten.





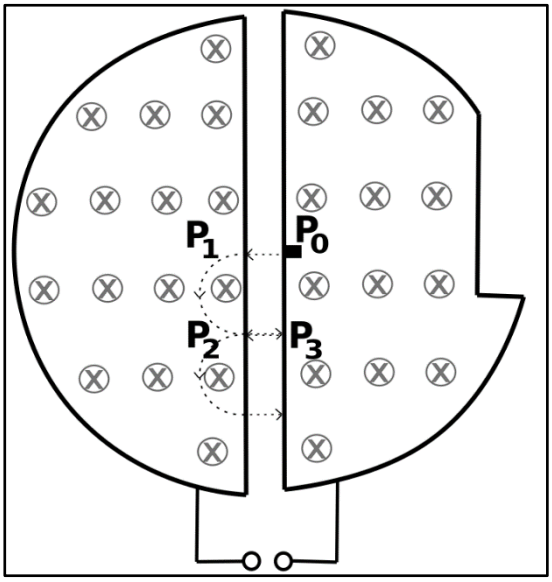
Die Breite des Spalts zwischen den Duanten ist im Vergleich zu ihrem Durchmesser gering. Am Punkt P_o befindet sich eine Protonenquelle, die Protonen mit einer Anfangsgeschwindigkeit von v = 0 m/s freisetzt. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass das homogene Magnetfeld ausschließlich im Inneren der Duanten wirkt und nicht im Bereich des Spalts zwischen ihnen. Der Einfluss der Schwerkraft wird vernachlässigt. Anfangs wird an die Duanten eine **Gleichspannung** angelegt, so dass der linke Duant D1 negativ geladen ist. Bei einer bestimmten Stärke des Magnetfeldes B verläuft die Bahnkurve eines Protons gemäß der unteren Abbildung.

a) Erläutern Sie bitte die unterschiedlichen Bewegungsformen des Protons bis zum Erreichen des Punktes P3 und geben Sie dabei eine fundierte Begründung an.

Die Protonen werden durch das homogene elektrische Feld bis zum Punkt P1 gleichmäßig beschleunigt, wodurch eine geradlinige und gleichmäßig positiv beschleunigte Bewegung entsteht. Anschließend treten sie senkrecht in das homogene Magnetfeld ein, das durch die Lorentzkraft die Protonen zu einer gleichförmigen Kreisbewegung zwingt. Nach diesem Abschnitt gelangen die Protonen im Punkt P2 erneut in das elektrische Feld, wo sie durch dieses bis zum Stillstand im Punkt P3 gleichmäßig negativ abgebremst werden, was zu einer geradlinigen und gleichmäßig negativ beschleunigten Bewegung führt. Da sich die Ausgangssituation wiederholt, wiederholt sich dieser beschriebene Ablauf. Die Protonen bewegen sich in geradlinigen Abschnitten und Halbkreisbögen gemäß der nachfolgenden Zeichnung nach unten (alternativ: nach vorne), bis sie auf die Wand des Duanten treffen.

b) Skizzieren Sie in die folgende Abbildung den weiteren Verlauf der Bahnkurve des Protons nach dem Erreichen von P3 und erläutern Sie die zugrunde liegenden Gründe.

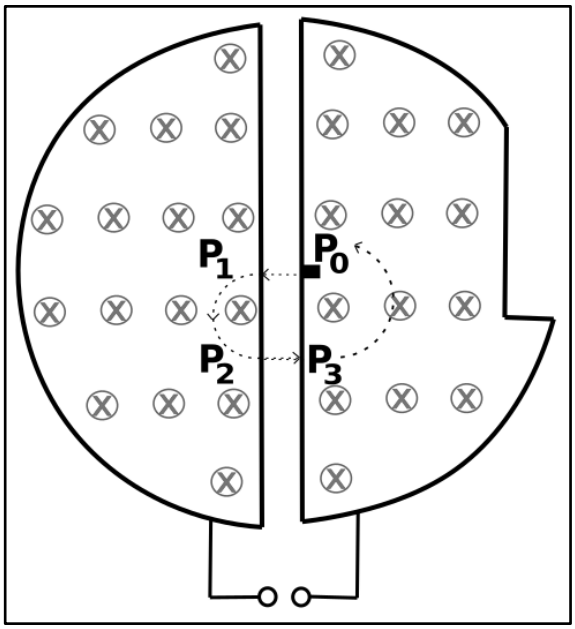
Da sich die Ausgangssituation wiederholt, wiederholt sich dieser beschriebene Ablauf. Die Protonen bewegen sich in geradlinigen Abschnitten und Halbkreisbögen gemäß der nachfolgenden Zeichnung nach unten (alternativ: nach vorne), bis sie auf die Wand des Duanten treffen.



Nachdem sich das Proton erstmals im Inneren des Duanten D1 befindet, wird die Spannung zwischen den Elektroden umgepolt.

c) Unter diesen Bedingungen erläutern Sie bitte die Bewegung des Protons, beginnend bei der Protonenquelle, und begründen Sie diese. Skizzieren Sie die Bahn des Protons (in der rechten Abbildung) bis zu seinem ersten Austritt aus dem Duanten D2.

Aufgrund der Gleichheit der Verhältnisse bis zum Austritt aus D1 im Punkt P2, wie zuvor in a) beschrieben, folgt, dass sich dieselbe Bahn wie in a) ergibt. Das Proton wird erneut positiv beschleunigt, indem es durch das elektrische Feld hindurchgeht. Innerhalb des Duanten D2 beschreibt es aufgrund der höheren Geschwindigkeit einen Halbkreis mit einem größeren Radius im Vergleich zu D1.



Die Berechnung der Aufenthaltsdauer eines Protons in einem Duanten erfolgt durch die folgende Beziehung.

$$T_D = \frac{\pi \cdot m}{q \cdot B}$$

(m_p = Masse Proton, q = Ladung Proton, B = Betrag der magnetischen Flussdichte).

d) Leiten Sie diese Beziehung unter Berücksichtigung der entsprechenden Begründungen her.

$$F_L = F_Z$$

$$q \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

Einsetzen in T_D

$$T_D = \frac{\pi \cdot m v}{v \cdot q \cdot B}$$

$$= \frac{\pi \cdot m}{q \cdot B}$$

Bahngeschwindigkeit

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} \text{ für } 360^\circ$$

$$T_D = \frac{\pi \cdot r}{v} \text{ für } 180^\circ$$

e) Erklären Sie außerdem, warum die Aufenthaltsdauer unabhängig vom Radius ist und folglich der Radius in der genannten Beziehung nicht vorkommt.

Obwohl der Radius und damit der zurückgelegte Weg mit zunehmender Geschwindigkeit ansteigen, bleibt der Quotient aus Weg und Geschwindigkeit konstant, da der Radius proportional zur Geschwindigkeit wächst.

Die Erhöhung der Geschwindigkeit des Protons erfolgt schrittweise, indem eine Wechselspannung mit konstanter Frequenz an die Duanten angelegt wird.

f) Begründen Sie anhand der zuvor genannten Beziehung für die Aufenthaltsdauer, warum durch die Anwendung einer Wechselspannung mit **konstanter** Frequenz eine schrittweise Erhöhung der Geschwindigkeit möglich ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass aufgrund der geringen Breite des Spalts zwischen den Duanten die Beschleunigungszeit im Spalt vernachlässigt werden kann.

Die Verweildauer in den Duanten ist unabhängig vom Radius, weshalb das Proton das elektrische Feld stets in gleichbleibenden Zeitintervallen durchläuft. Dies impliziert, dass die Frequenz der angelegten Wechselspannung konstant sein kann. Um dies zu gewährleisten, muss die Spannung bei jedem Verlassen eines Duanten den gleichen Betrag, jedoch mit wechselndem Vorzeichen, aufweisen. Daher muss die Periodendauer der Wechselspannung der Umlaufdauer $T = 2 \cdot T_D$ eines Protons entsprechen.

g) Berechnen Sie die Frequenz f der Wechselspannung unter der Voraussetzung, dass die Stärke B des Magnetfeldes 2,0 T beträgt.

$$f = \frac{1}{T}$$

$$= \frac{q \cdot B}{2 \cdot \pi \cdot m}$$

$$= \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 2\,T}{2 \cdot \pi \cdot 1{,}672 \cdot 10^{-27}\,kg} = 30513820{,}74\,Hz$$

Bei den nachfolgenden Berechnungen wird angenommen, dass die Protonen den Spalt zur optimalen Beschleunigung durchlaufen, wenn die angelegte Wechselspannung jeweils ihren Maximalwert hat. Der Scheitelwert der Wechselspannung wird mit U_0 = 30.000 V angegeben. Aufgrund der kurzen Zeit, die zum Durchlaufen des Spalts benötigt wird, wird zur Vereinfachung angenommen, dass die angelegte Spannung während dieser Zeit konstant den Wert hat. Die Stärke des Magnetfeldes beträgt 2,0 T.

h) Berechnen Sie die erreichbare Energie in MeV eines Protons nach 50 Umläufen.

Die Protonen durchlaufen pro Umlauf 2 mal den Spalt.

$$E_{kin} = n \cdot e \cdot 2 \cdot U_0 = 50 \cdot 2 \cdot 30\,keV = 3\,MeV$$

i) Berechnen Sie klassisch die dann erreichte Geschwindigkeit.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$v^2 = \frac{2 \cdot E_{kin}}{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 3.000.000\,V \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C}{1{,}672 \cdot 10^{-27}\,kg}} = 23976663\,\frac{m}{s}$$

j) Berechnen Sie den Durchmesser, den ein Zyklotron in diesem Fall mindestens besitzen muss.

$$F_L = F_z$$

$$q \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} = \frac{1{,}672 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \cdot 23976663\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 2\,\text{T}}$$

$$= 0{,}125 = 12{,}5\,\text{cm}$$

Der Durchmesser muss mind. 25cm betragen.

Bei sehr hohen Geschwindigkeiten der Protonen müssen relativistische Effekte berücksichtigt werden. Dies führt dazu, dass Teilchen mit einem Zyklotron der oben genannten Bauart, selbst bei möglicherweise vergrößerten Abmessungen, nur bis zu einer bestimmten maximalen Energie beschleunigt werden können, da sie, wie es heißt, "aus dem Takt" geraten.

k) Erklären Sie, welcher relativistische Effekt in diesem Fall eine entscheidende Rolle spielt. Erläutern Sie qualitativ, warum die Protonen "aus dem Takt" geraten und daher nur bis zu einer bestimmten maximalen Energie beschleunigt werden können.

<u>Mit steigender Geschwindigkeit muss die dynamische Masse berücksichtigt werden, die mit der Geschwindigkeit zunimmt. Gemäß</u>

$$t_\text{D} = \frac{\pi \cdot m_\text{P}}{q \cdot B}$$

<u>ist die Dauer eines Umlaufs nicht mehr konstant, sondern nimmt mit der zunehmenden Masse zu. Die Umlaufdauer stimmt nicht mehr mit der nach klassischer Berechnung ermittelten Frequenz der Beschleunigungsspannung überein. Die Protonen erreichen den Spalt nicht mehr zum optimalen Zeitpunkt für eine effiziente Beschleunigung, sondern sie kommen verspätet an. Folglich werden sie entweder weniger beschleunigt oder gebremst, wenn sie den Spalt bei umgekehrter Polung der Wechselspannung erreichen. Dies führt zu einem Maximum in der Energie der Protonen.</u>

Elektronen können mithilfe eines Zyklotrons der bisher behandelten Bauart nur auf vergleichsweise geringe Energien beschleunigt werden. Daher wurde eine Modifikation entwickelt, die zum sogenannten Elektronenzyklotron führte. Bei dieser Modifikation wird der Scheitelwert der angelegten Wechselspannung genau auf 511 kV eingestellt, um Elektronen zu beschleunigen.

l) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie eines Elektrons bei jedem Durchqueren des Spalts um die Ruheenergie zunimmt. Die Masse nach dem n-ten Umlauf kann durch die Beziehung

$$m = m_0 \cdot (2 \cdot n + 1)$$

ausgedrückt werden, was bedeutet, dass die Umlaufzeit bei jedem Umlauf gemäß der in Teilaufgabe d) angegebenen Beziehung wächst.

Es gilt $E = m \cdot c^2$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{511.000\,V \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C}{(2{,}997 \cdot 10^8 \frac{m}{s})^2}$$

$$= 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg$$

Das entspricht Literaturwert der Ruhemasse eines Elektrons.

m) Begründen Sie, warum trotzdem die Frequenz (bzw. Periodendauer) der Wechselspannung konstant gewählt werden kann.

Bei jedem Umlauf nimmt die Umlaufdauer um ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer der gewählten Beschleunigungsspannung zu. Das bedeutet, dass die Teilchen den Spalt um die entsprechende Anzahl von Perioden später erreichen, jedoch keine Phasenverschiebung auftritt.